Variedades Diferenciables

Construcción de variedades.
Curso académico 2020-2021.

---

1. Sean los conjuntos $\{(U_N, \varphi_N)\,,\ (U_S, \varphi_S)\}$, donde
$$U_N = \left\{(x,y) \in \mathbb{S}^1 |\ y \neq 1\right\}$$
$$U_S = \left\{(x,y) \in \mathbb{S}^1 |\ y \neq -1\right\}$$
y φ_N, respectivamente φ_S, la proyección estereográfica desde el polo norte N, respectivamente desde el polo sur S.
   (a) Demostrar que $\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N)\,,\ (U_S, \varphi_S)\}$ es un atlas sobre $\mathbb{S}^1$.
   (b) ¿Puede construirse un atlas consistente de una sola carta?
2. Demostrar que el grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices inversibles es un variedad diferenciable.
3. Demostrar que el conjunto $O(n) = \left\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid AA^T = \mathrm{Id}_n\right\}$ forman una variedad diferenciable euclídea. Determinar la dimensión de $O(n)$, así como el índice p tal que $O(n) \subset \mathbb{R}^p$.
4. Sea $E = \left\{(\sin 2t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 |\ t \in \mathbb{R}\right\}$.
   (a) Demuéstrese que $\{(E, \varphi)\}$ con la aplicación $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definida por
$$\varphi((\sin 2t, \sin t)) = t,\ t \in (0, 2\pi)$$
   define un atlas sobre E.
   (b) Demostrar que, analogamente, $\{(E, \psi)\}$ con $\psi : E \to \mathbb{R}$ definida por
$$\varphi((\sin 2t, \sin t)) = t,\ t \in (-\pi, \pi)$$
   define también un atlas sobre E.
   (c) ¿Son ambas estructuras diferenciables equivalentes?
   (d) ¿Supone la existencia de una estructura de variedad sobre E una contradicción con el hecho de no ser una variedad euclídea del plano?
5. (Ejemplo de VD no separable T_2) Sean en $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos
$$E_1 = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\ \right\}$$
$$E_2 = \left\{(x,1) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{R}\right\}$$
Defínase en $E_1 \cup E_2$ la siguiente relación de equivalencia :
$$(x_1, 0)\,(x_2, 0) \iff x_1 = x_2$$
$$(x_1, 1)\,(x_2, 1) \iff x_1 = x_2$$
$$(x_1, 0)\,(x_2, 1) \iff x_1 = x_2 < 0.$$
Sea $X = E/$ el espacio cociente por la relación de equivalencia. Encontrar un atlas sobre S y justificar que no satisface el axioma de separación T_2 con la topología inducida.
6. En $[0,1] \times [0,1]$ se define la relación de equivalencia que identifica los siguientes puntos
$$(0,t)\,(1,t) \iff t \in [0,1]$$
$$(s,0)\,(1-s,1) \iff s \in [0,1]$$
Sea K el espacio cociente dotado de la topología final dada por la proyección canónica $p : [0,1]\times[0,1] \to K$. Dotar a K de una estructura de variedad diferenciable de dimensión dos. ¿Puede K ser una variedad euclídea?

7. En $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia :

$$(x_0,..,x_n)\,(y_0,..,y_n) \Longleftrightarrow \exists\lambda\neq 0 \text{ tal que } (y_0,..,y_n)=(\lambda x_0,..,\lambda x_n)\,.$$

El espacio cociente $\left(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}\right)/$ se llama espacio proyectivo real de dimension n, notado por $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Se considera la proyección canónica de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ sobre $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que el conjunto $\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i)\mid 1\leq i\leq n\}$ con

$$U_i=\{(x_0:..:x_n)\mid x_i\neq 0\}$$

y las aplicaciones $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\varphi_i\,(x_0:..:x_n)=\left(\frac{x_0}{x_i},..,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},..,\frac{x_n}{x_i}\right)$$

definen un atlas sobre $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

8. Establecer un difeomorfismo entre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y la recta proyectiva $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

9. Demostrar que una superficie de revolución es una variedad euclídea en $\mathbb{R}^3$.

10. Sea $M=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})\mid \operatorname{rango}(A)=1\}$. Demostrar que M es una variedad diferenciable euclídea.